

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

1) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x + z = 2 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

con il metodo di Cramer e confrontare che la soluzione trovata è esatta utilizzando il metodo della matrice inversa.

*Metodo di Cramer*

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{z}{-1} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -0 + 2 - 9 + 0 - 3 + 6 = -4 \neq 0 \Rightarrow \Delta = \det A = -4$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è diverso da zero, ne segue che il sistema dato, secondo il Teorema di Cramer, ammette una ed una sola soluzione ricavabile dalle ben note formule di Cramer. Precisamente risulta:

$$(x, y, z) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

avendo indicato con:

$\Delta$  il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema, ovvero il  $\det A$ ;

$\Delta_x$  il determinante della matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la colonna dei coefficienti della  $x$  con la colonna dei termini noti;

$\Delta_y$  il determinante della matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la colonna dei coefficienti della  $y$  con la colonna dei termini noti;

$\Delta_z$  il determinante della matrice ottenuta da  $A$  sostituendo la colonna dei coefficienti della  $z$  con la colonna dei termini noti.

Ma allora segue:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_x = \begin{vmatrix} \overset{N}{0} & \overset{y}{2} & \overset{z}{-1} \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -0 + 4 - 6 + 0 - 0 + 4 = 2 \Rightarrow \Delta_x = 2$$

**I Parziale - Compito B**

**02/05/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{z}{-1} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_y = \begin{vmatrix} \overset{x}{1} & \overset{N}{0} & \overset{z}{-1} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 6 + 2 - 2 + 0 = -8 \Rightarrow \Delta_y = -8$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{z}{-1} \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_z = \begin{vmatrix} \overset{x}{1} & \overset{y}{2} & \overset{N}{0} \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 4 + 0 - 0 - 6 - 12 = -14 \Rightarrow \Delta_z = -14$$

Quindi si ha:

$$(x, y, z) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left( \frac{2}{-4}, \frac{-8}{-4}, \frac{-14}{-4} \right) = \left( -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2} \right)$$

cioè:

$$(x, y, z) = \left( -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2} \right)$$

*Metodo della matrice inversa*

Poiché, per quanto visto precedentemente, risulta  $\det A = \Delta = -4 \neq 0$ , segue che la matrice  $A$  ammette l'inversa  $A^{-1}$  che occorre ora determinare con uno dei due metodi ben noti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo l'inversa di  $A$  utilizzando il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici  $A^*$ . Risulta:

$$\begin{array}{lll} c_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -3; & c_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4; & c_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9; \\ c_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1; & c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; & c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \\ c_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2; & c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; & c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \end{array}$$

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$X = A^{-1}N \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{9}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + \frac{1}{2} - 1 \\ 0 + 0 + 2 \\ 0 + \frac{1}{2} + 3 \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione trovata, operando sia con Cramer che con la matrice inversa, è la medesima.

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

2) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, verificare se il sistema dato, essendo quadrato (il numero delle equazioni è uguale a numero delle incognite), è o meno risolubile secondo Cramer, cioè se è soddisfatta o meno la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer, secondo cui un sistema quadrato ammette una ed una sola soluzione se e solo il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema assegnato è diverso da zero. Nel caso specifico, quindi, risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 0 - 18 + 0 + 4 + 21 = 0 \Rightarrow \Delta = \det A = 0$$

Poiché, il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite del sistema è uguale a zero, ne segue che il sistema dato non è risolubile utilizzando il Teorema di Cramer, motivo per cui bisogna andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3 \Rightarrow \det A = \Delta = 0 \Rightarrow r(A) \neq 3$$

Poiché:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

ne segue che è:

$$r(A) = 2$$

in quanto esiste un minore del secondo ordine, estraibile da  $A$ , diverso da zero.

Occorre ora controllare il rango della matrice completa, ottenuta dalla matrice  $A$  con l'aggiunta della colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito B**

**02/05/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

Precisamente:

$$M' = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -0 - 0 - 6 + 0 + 6 + 0 = 0$$

Poiché entrambi i minori orlati del terzo ordine sono nulli, ne segue proprio che:

$$r(AN) = 2$$

cioè:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Dunque il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è  $n = 3$  (le incognite che figurano nel sistema sono proprio  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) e risulta  $n > r$ , segue che il sistema ammette  $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$  soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da un unico parametro.

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite  $x$  ed  $y$  che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della  $x$  e della  $y$ , e non quelli della  $z$ , bisogna considerare come parametro proprio l'incognita trascurata, cioè la  $z$ . Ne segue, quindi, posto  $z = t$  parametro reale:

$$\begin{cases} x - y = 1 - 3t \\ 3x - y = 3 - 2t \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 - 3t & -1 \\ 3 - 2t & -1 \end{vmatrix} = -1 + 3t + 3 - 2t = t + 2 \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = t + 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 3t \\ 3 & 3 - 2t \end{vmatrix} = 3 - 2t - 3 + 9t = 7t \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = 7t$$

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

da cui si ricava:

$$(x, y) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left( \frac{t+2}{2}, \frac{7t}{2} \right) = \left( \frac{1}{2}t+1, \frac{7}{2}t \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà

$$(x, y, z) = \left( \frac{1}{2}t+1, \frac{7}{2}t, t \right)$$

con  $t$  parametro reale ( $t \in \mathbb{R}$ ).

**3) Risolvere il seguente sistema lineare:**

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = 1 \\ x + y - 2z + 2w = 2 \\ 4x - 4y + 8z - 4w = 4 \end{cases}$$

Occorre, in primo luogo, osservare che il sistema dato è rettangolare (il numero delle equazioni è diverso dal numero delle incognite): è, infatti,  $3 \times 4$  (3 equazioni e 4 incognite). Bisogna allora andare a controllare se esso ammette soluzioni in base al Teorema di Rouché-Capelli, ovvero se il rango della matrice incompleta è uguale al rango della matrice completa. Risulta, pertanto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(A) \leq 3$$

Utilizzando il Teorema degli Orlati, si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$$

per cui occorre andare a calcolare adesso i suoi minori orlati.

Precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 8 - 8 - 8 + 8 = 0; \quad M'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 8 + 4 + 4 + 8 - 4 = 0$$

Poiché tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, segue:

$$r(A) \neq 3 \Rightarrow r(A) = 2$$

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Consideriamo adesso la matrice completa ottenuta da  $A$  aggiungendo ad essa la colonna dei termini noti:

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 < r(AN) \leq 3$$

Occorre determinare ora il rango di  $AN$ . Sempre per il Teorema degli Orlati si può partire da un minore del secondo ordine diverso da zero estraibile dalla matrice  $AN$ . Sia esso:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow r(AN) \geq 2$$

Due orlati di tali minori sono stati già calcolati in precedenza quando si è determinato il rango della matrice incompleta, precisamente:

$$M' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 8 - 8 - 8 + 8 = 0$$

$$M'' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 8 + 4 + 4 + 8 - 4 = 0$$

Resta allora da calcolare l'ultimo minore orlato ottenuto aggiungendo la quarta colonna e la terza riga:

$$M''' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 - 4 - 4 + 8 + 4 = 0$$

Poiché anche in questo caso tutti i minori orlati del terzo ordine sono uguali a zero, si può affermare che è

$$r(AN) = 2$$

Dunque:

$$r(A) = r(AN) = r = 2$$

ovvero è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di risolubilità di un sistema imposta dal Teorema di Rouché-Capelli. Ne segue che il sistema dato ammette soluzioni.

Poiché, inoltre, il numero delle incognite del sistema è  $n = 4$  (le incognite che figurano nel sistema sono proprio  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$ ) e risulta  $n > r$ , segue che il sistema ammette  $\infty^{n-r} = \infty^{4-2} = \infty^2$  soluzioni, cioè le soluzioni del sistema dipendono da due parametri.

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

Poiché il minore diverso da zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

è costituito dai coefficienti delle incognite  $x$  ed  $y$  che figurano nella prima e nella seconda equazione, il sistema dato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x - y + 2z - w = 1 \\ x + y - 2z + 2w = 2 \end{cases}$$

Inoltre, poiché nel minore non nullo considerato sono stati coinvolti esclusivamente i coefficienti della  $x$  e della  $y$ , non quelli della  $z$  e della  $w$ , bisogna considerare come parametri proprio le incognite trascurate, cioè la  $z$  e la  $w$ . Ne segue, quindi, posto  $z = h$  e  $w = k$  parametri reali:

$$\begin{cases} x - y = 1 - 2h + k \\ x + y = 2 + 2h - 2k \end{cases}$$

che ora, avendo la matrice dei coefficienti diversa da zero, si può risolvere o con uno dei metodi classici, oppure con le regole di Cramer. Ne segue:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 2$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 - 2h + k & -1 \\ 2 + 2h - 2k & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2h + k + 2 + 2h - 2k = 3 - k \quad \Rightarrow \quad \Delta_x = 3 - k$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 2h + k \\ 1 & 2 + 2h - 2k \end{vmatrix} = 2 + 2h - 2k - 1 + 2h - k = 4h - 3k + 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta_y = 4h - 3k + 1$$

da cui si ricava:

$$(x, y, z) = \left( \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) = \left( \frac{3 - k}{2}, \frac{4h - 3k + 1}{2} \right)$$

soluzione del sistema equivalente a quello assegnato.

Dunque la soluzione del sistema dato sarà

$$(x, y, z, w) = \left( \frac{3 - k}{2}, \frac{4h - 3k + 1}{2}, h, k \right)$$

con  $h$  e  $k$  parametri reali ( $h, k \in \mathbb{R}$ ).

**4) Studiare la seguente funzione polinomiale:**

$$y = x^3 - 3x + 2$$

**CAMPO DI ESISTENZA**

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito B**

**02/05/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

**INTERSEZIONI CON GLI ASSI**

Poiché si è in presenza di un polinomio di quarto grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di polinomi di primo o di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, ovvero 2, sono esattamente  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ , essendo 2 un numero primo. Ma allora, posto:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2$$

procedendo per tentativi, si ottiene:

$$P(x=+1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$$

cioè per  $x = +1$  il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & +2 \\ +1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Pertanto il polinomio  $P(x)$  si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = x^2 + x - 2$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ ed } x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$$

da cui:

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$$

Risulta ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - 3x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 2) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

sostituendo, in  $y$ , al posto della  $x$  il valore 0

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
 CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

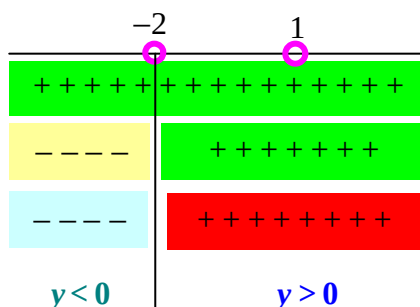
**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 - 3x + 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2(x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-1 = 0 \\ x+2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} &\Rightarrow B = (1,0); C = (-2,0) \text{ sono i punti di intersezione} \\ &\text{della funzione con l'asse } x \end{aligned}$$

**SEGNO DELLA FUNZIONE**

Risulta:

$$\begin{aligned} y > 0 &\Rightarrow x^3 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (è un quadrato)} \\ x > -2 \end{cases} \end{aligned}$$



Dunque si ha:

$$y > 0 \text{ per } x > -2$$

**LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \end{aligned}$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito B**

**02/05/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

**STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA**

Risulta:

$$D(x^3 - 3x + 2) = 3x^2 - 3$$

da cui segue:

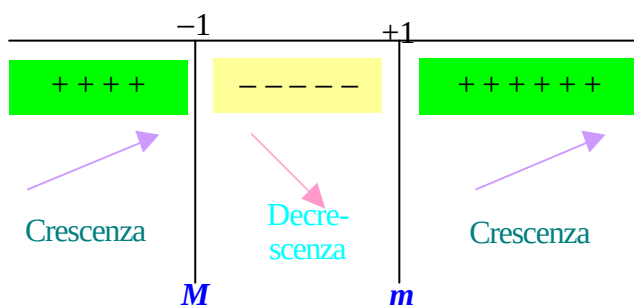
$$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$$

Ne segue, pertanto, che le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione sono:

$$x_1 = -1 \text{ ed } x_2 = +1$$

da cui:

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ed } x > +1$$



Dunque la funzione ha un massimo in  $x = -1$  ed un minimo in  $x = +1$ .

In particolare:

$$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$x = +1 \Rightarrow y = (+1)^3 - 3(+1)^2 + 2 = +1 - 3 + 2 = 0$$

Ne segue, quindi, che:

$M(-1;4)$  è il punto di *Massimo*

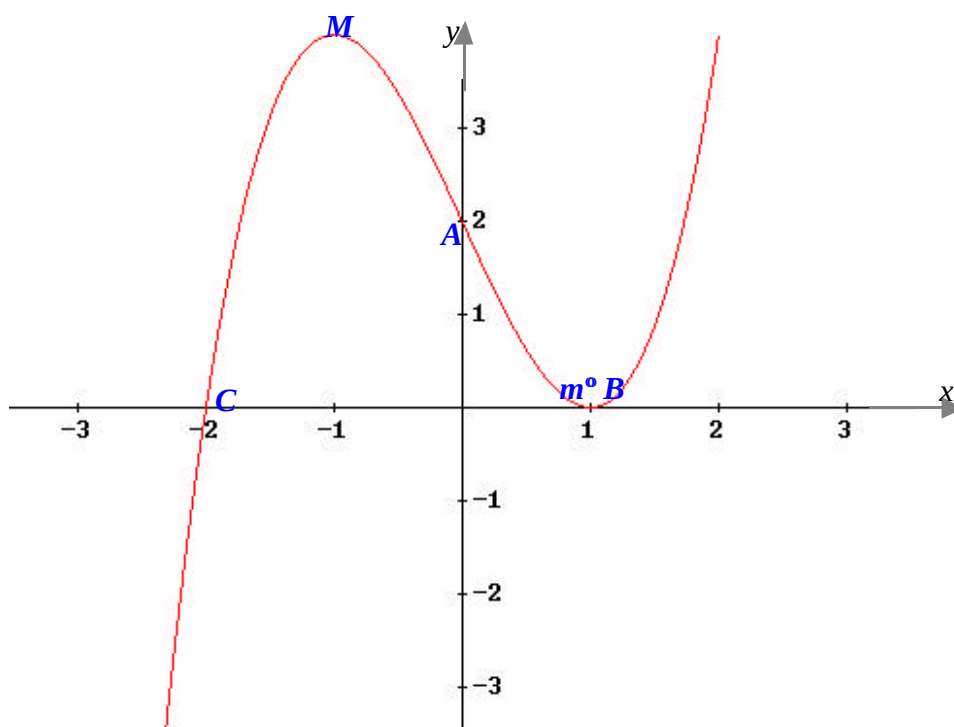
$m(1;0) \equiv B$  è il punto di *minimo*

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO**  
**FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE**  
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

---

I Parziale - Compito B  
02/05/2006  
A.A. 2005 – 2006

**IL GRAFICO**



**Prof.ssa Daniela Tondini**

**I Parziale - Compito B**

**02/05/2006**

**A.A. 2005 – 2006**

5) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2}$$

**CAMPO DI ESISTENZA**

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 \neq 0\}$$

Occorre, pertanto, trovare le soluzioni dell'equazione associata a tale disuguaglianza. Essendo, però, il primo membro una somma di quadrati (precisamente  $(x)^2 = x^2$  e  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ), che è sempre positiva e mai uguale a zero, segue che la disuguaglianza in questione è sempre soddisfatta, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

**INTERSEZIONI CON GLI ASSI**

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{9}{2} = -4,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{9}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (2x - 3)(2x + 3) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 3 = 0 \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = +\frac{3}{2} = +1,5 \\ x_2 = -\frac{3}{2} = -1,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{3}{2}, 0\right); C = \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

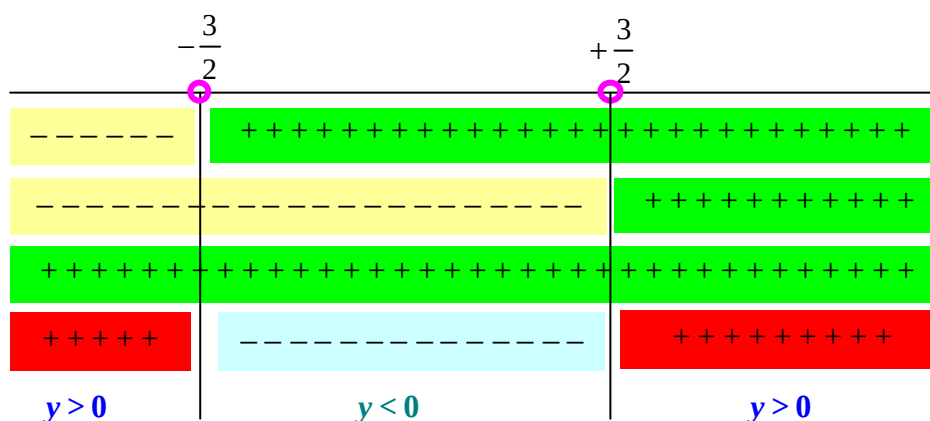
**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

**SEGNO DELLA FUNZIONE**

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 9 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x+3)(2x-3) > 0 \\ \text{sempre (sommadi due quadrati)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+3 > 0 \\ 2x-3 > 0 \\ \text{sempre} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x > +\frac{3}{2} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \text{ per } x < -\frac{3}{2}, x > \frac{3}{2}$$

**LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{4x^2}{x^2} \right) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 4$$

cioè la retta di equazione  $y = 4$  è un asintoto orizzontale per la funzione:

$$\text{AO.: } y = 4$$

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

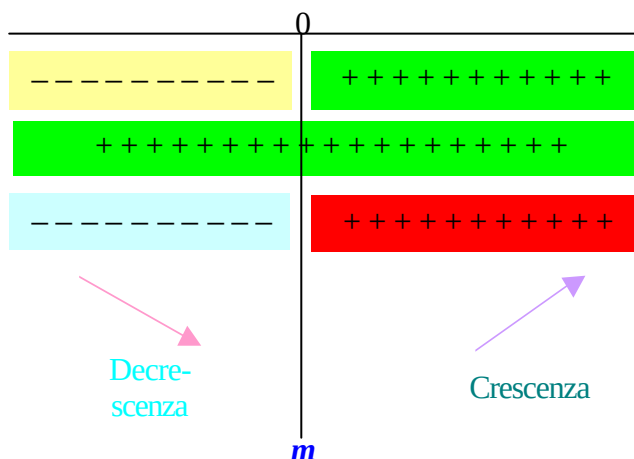
**STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA**

Risulta:

$$D\left(\frac{4x^2-9}{x^2+2}\right) = \frac{8x \cdot (x^2+2) - (4x^2-9) \cdot (2x)}{(x^2+2)^2} =$$
$$= \frac{8x^3+16x-8x^3+18x}{(x^2+2)^2} = \frac{34x}{(x^2+2)^2}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{34x}{(x^2+2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 34x > 0 \\ (x^2+2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



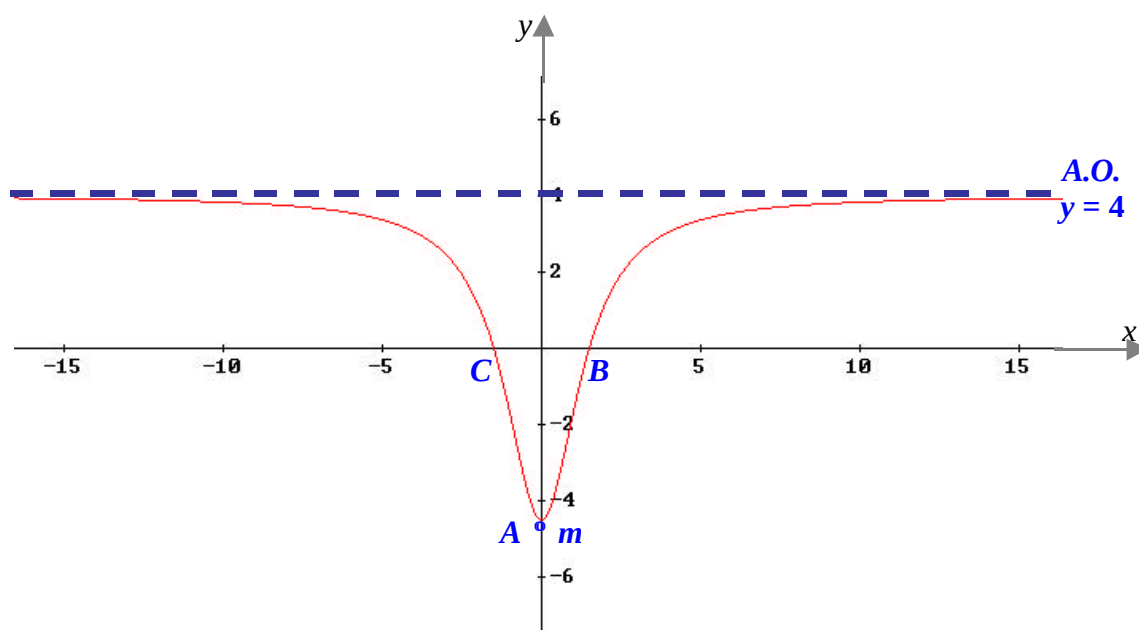
Dunque la funzione ha un minimo in  $x=0$ , ovvero il punto di intersezione della funzione con l'asse delle  $y$ , precisamente il punto  $A$ , è un punto di minimo.

Ne segue, quindi, che:

$$m\left(0; -\frac{9}{2}\right) \equiv A \text{ è il punto di } \textit{minimo}$$

**I Parziale - Compito B**  
**02/05/2006**  
**A.A. 2005 – 2006**

**IL GRAFICO**



**Osservazione**

La funzione non interseca l'asintoto orizzontale. Infatti il seguente sistema non ammette soluzioni:

$$\begin{cases} y = \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} = 4 \Rightarrow$$

(essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri)

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - 9}{x^2 + 2} - 4 = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 9 - 4(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 9 - 4x^2 - 8}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{17}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow -17 = 0 \Rightarrow \text{mai}$$

Dunque non esiste il punto di intersezione della funzione con l'asintoto orizzontale.